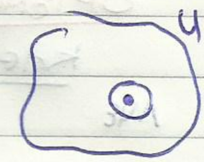
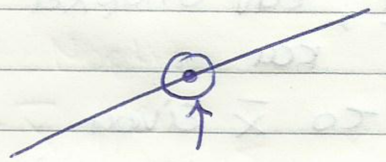
ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο U του χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοικτό: αν $(\forall \bar{x}_0 \in U)(\exists \varepsilon > 0): B(\bar{x}_0, \varepsilon) \subset U$



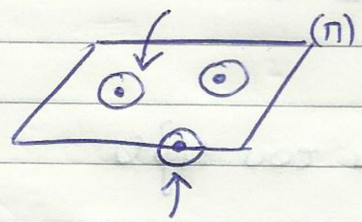
πχ

• στον $\mathbb{R}^2$ δίνεται η ευθεία (ε)



ο ορισμός δεν ισχύει εδώ διότι δεν υπάρχει $B(\bar{x}_0, \varepsilon)$ ώστε να είναι $\subset U$.

• στον $\mathbb{R}^2$ δίνεται το επίπεδο (Π)



ο ορισμός δεν ισχύει πάντα εδώ διότι μπορεί και να υπάρχει αλλά και να μην υπάρχει $B(\bar{x}_0, \varepsilon)$ ώστε να 'ναι $\subset U$

π.χ

ΝΔΟ η ανοικτή μπάλα $B(\bar{x}_0; r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}$ $r > 0$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

ΛΥΣΗ

Έστω ένα $\bar{x}$ ώστε $\bar{x} \in U = B(\bar{x}_0, r) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0): \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r - \varepsilon$.

ΘΔΟ $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon\} \subset U$

Έστω ένα $\bar{y}$ ώστε $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon$
και ΘΔΟ $\|\bar{y} - \bar{x}_0\| < r$

$$\|\bar{y} - \bar{x}\| = \|\bar{y} - \bar{x}_0 + \bar{x}_0 - \bar{x}\| \leq \|\bar{y} - \bar{x}_0\| + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \varepsilon + r - \varepsilon = r$$

ΑΣΚΗΣΗ (για το σπίτι)

ΝΔΟ το σύνολο $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ είναι ανοικτό

ΛΥΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα υποσύνολο $U \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται κλειστό: εαν $\mathbb{R}^n / U$ είναι ανοικτό

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται εσωτερικό σημείο του U, εαν υπάρχει ένα ε το ώστε $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$ και εξωτερικό σημείο του U, εαν το $\bar{x}$ είναι εσωτερικό στο $\mathbb{R}^n / U$ και συνοριακό σημείο εαν το $\bar{x}$ δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό.

Παρατήρηση: $\mathbb{R}^n = \{$ εσωτερικά σημεία του $U \} \cup$
$\cup \{$ εξωτερικά σημεία του $U \} \cup$
$\cup \{$ συνοριακά σημεία του $U \}$. $\forall U \subset \mathbb{R}^n$
και μάλιστα ξένα μεταξύ τους!!!

ΟΡΙΣΜΟΣ. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του U ονομάζεται εσωτερικό του U και συμβολίζεται με $\mathring{U}$ και το σύνολο των συνοριακών σημείων ονομάζεται σύνορο του U και συμβολίζεται με ∂U.

ΟΡΙΣΜΟΣ Η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων που περιέχουν το U ονομάζεται κλειστή θήκη του U και συμβολίζεται με $\bar{U}$.